XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Пусть *d*1, *d*2, ..., *dk* (*k* > 1) — некоторые различные натуральные делители натурального числа *n*. Оказалось, что *dk*–*dk*–1 = *dk*–1–*dk*–2 = ... = *d*2–*d*1 и *n* = *d*1+*d*2+...+*dk*. При каких *n* это возможно? (USA Mathematical Talent Search, 2015—2016, раунд 1)

**2.** Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD*, в котором ∠*DAB*+∠*ABC* = 90°; *M* — середина *CD*. Пусть *AD* = *a*, *BC* = *b*. Выразите через *a* и *b* значение *SABM*−*SDAM*−*SBCM*. (Польша, математическая олимпиада для гимназистов, 2015, 3 этап)

**3.** У продавца есть неограниченный запас гирь весом 1, 2, 4, 8, ..., 1024 г. Он положил на правую чашу весов батон колбасы, и хочет класть на левую чашу или снимать с неё гири (по одной за ход). Он хочет выяснить, правда ли, что батон весит строго больше 682 г, но строго меньше 1365 г. Может ли он справиться за 11 ходов? (И. Богданов)

**4.** На первый этап Олимпиады по закрытию скобочек пришло 2016 участников. Согласно новому Порядку, если на второй этап прошли *a* участников, на третий — *b* участников, а на четвертый — *c* участников, то *a*−*b* должно равняться *b*−*c*. Поскольку участник очередного этапа должен быть участником и предыдущего, *a* ≥ *b* ≥ *c*. Сколькими способами жюри олимпиады может выбрать участников этапов, согласно новому Порядку? Варианты считаются различными, если они отличаются составом участников хотя бы на одном этапе. (Сербия, заключительный этап, 3 разряд, 2002)

**5.** При каких натуральных *n* выражение *m*3−3*m* (*m* — натуральное) даёт все возможные остатки при делении на *n*? (К. Сухов)

**6.** Положительные числа *a*, *b*, *c*, *d* таковы, что *abcd* = 1. Докажите неравенство *ab*+*bc*+*cd*+*da* ≤ . (Неравенства народов мира, третий разряд, уровень 7, урок 15, N.145b)

**7.** Дан остроугольный разносторонний треугольник. С помощью циркуля и линейки проведите две прямые, делящие данный треугольник на четыре части так, что из них можно сложить прямоугольник, и ни одна из прямых не параллельна стороне треугольника. (А. Шкловер)

**8.** В треугольнике *ABC* (*AB* < *AC*) биссектриса угла *A* пересекает *BC* в точке *D*, *M* — середина *BC*. Точка *P* — основание высоты из точки *B* на отрезок *AD*. Прямая *BP* пересекает отрезок *AM* в точке *Q*. Докажите, что *DQ* || *AB*. (USA Mathematical Talent Search, 2015—2016, раунд 3)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Найдите все натуральные *a* и *b*, для которых *a*3+1 и *b*3+1 делятся на *a*2+*b*2. (Саудовская Аравия, отбор на Gulf, 2013)

**2.** Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD*, в котором ∠*DAB*+∠*ABC* = 90°; *M* — середина *CD*. Пусть *AD* = *a*, *BC* = *b*. Выразите через *a* и *b* значение *SABM*−*SDAM*−*SBCM*. (Польша, математическая олимпиада для гимназистов, 2015, 3 этап)

**3.** У продавца есть неограниченный запас гирь весом 1, 2, 4, 8, ..., 1024 г. Он положил на правую чашу весов батон колбасы, и хочет класть на левую чашу или снимать с неё гири (по одной за ход). Он хочет выяснить, правда ли, что батон весит строго больше 682 г, но строго меньше 1365 г. Может ли он справиться за 11 ходов? (И. Богданов)

**4.** Дана клетчатая доска 37×37. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 5×5 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 90 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена. (Олимпиада Черновецкой области, 9 класс, 2014, модификация)

**5.** При каких натуральных *n* выражение *m*3−3*m* (*m* — натуральное) даёт все возможные остатки при делении на *n*? (К. Сухов)

**6.** Положительные числа *a*, *b*, *c*, *d* таковы, что *abcd* = 1. Докажите неравенство *ab*+*bc*+*cd*+*da* ≤ . (Неравенства народов мира, третий разряд, уровень 7, урок 15, N.145b)

**7.** Дан остроугольный разносторонний треугольник. С помощью циркуля и линейки проведите две прямые, делящие данный треугольник на четыре части так, что из них можно сложить прямоугольник, и ни одна из прямых не параллельна стороне треугольника. (А. Шкловер)

**8.** В треугольнике *ABC* (*AB* < *AC*) биссектриса угла *A* пересекает *BC* в точке *D*, *M* — середина *BC*. Прямая, параллельная *AB*, проходящая через точку *D*, пересекает отрезок *AM* в точке *Q*. Докажите, что *BQ* перпендикулярно *AD*. (USA Mathematical Talent Search, 2015—2016, раунд 3, модификация)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Найдите все натуральные *a* и *b*, для которых *a*3+1 и *b*3+1 делятся на *a*2+*b*2. (Саудовская Аравия, отбор на Gulf, 2013)

**2.** Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD*, в котором ∠*DAB*+∠*ABC* = 90°; *M* — середина *CD*, *AD* = *BC* = 1. Найдите значение *SABM*−*SDAM*−*SBCM*. (Польша, математическая олимпиада для гимназистов, 2015, 3 этап)

**3.** У продавца есть неограниченный запас гирь весом 1, 2, 4, 8, ..., 1024 г. Он положил на правую чашу весов батон колбасы, и хочет класть на левую чашу или снимать с неё гири (по одной за ход). Он хочет выяснить, правда ли, что батон весит строго больше 682 г, но строго меньше 1365 г. Может ли он справиться за 11 ходов? (И. Богданов)

**4.** Дана клетчатая доска 37×37. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 5×5 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 80 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена. (Олимпиада Черновецкой области, 9 класс, 2014, модификация)

**5.** При каких натуральных *n* выражение *m*2−3*m*+10 (*m* — натуральное) даёт все возможные остатки при делении на *n*? (К. Сухов)

**6.** Положительные числа *a*, *b*, *c*, *d* таковы, что *abcd* = 1. Докажите неравенство *ab*+*bc*+*cd*+*da* ≤ . (Неравенства народов мира, третий разряд, уровень 7, урок 15, N.145b)

**7.** На плоскости дана точка *A*. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре? (Минск-2008)

**8.** В треугольнике *ABC* (*AB* < *AC*) биссектриса угла *A* пересекает *BC* в точке *D*, *M* — середина *BC*. Прямая, параллельная *AB*, проходящая через точку *D*, пересекает отрезок *AM* в точке *Q*. Докажите, что *BQ* перпендикулярно *AD*. (USA Mathematical Talent Search, 2015—2016, раунд 3, модификация)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

**1.** На плоскости дана точка *A*. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку различные прямые. Проигрывает тот, после хода которого угол между какими–то из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре? (Минск–2008)

**2.** Натуральные числа *m*, *n* и простое число *p* удовлетворяют условиям: *m*2+*n*2 = *p* и *m*3+*n*3+4 делится на *p*. Найдите *m* и *n*. (Форум artofproblemsolving)

**3.** Дана клетчатая доска 37×37. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 5×5 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 90 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена. (Олимпиада Черновецкой области, 9 класс, 2014, модификация)

**4.** В стране города соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого города можно выехать не более, чем по 7 дорогам. Докажите, что эту страну можно так разбить на 11 республик, что ни в одной республике нет города, из которого выходят две дороги в города этой республики. (В. Брагин, Д. Карпов)

**5.** При каких натуральных *n* среди чисел вида *k*3–3*k*, где *k* ⎯ произвольное целое число, встречаются числа, дающие всевозможные остатки при делении на *n*? (К. Сухов)

**6.** Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими? (Д. Ширяев по мотивам Минска–2005)

**7.** Неотрицательные числа *x* и *y* удовлетворяют соотношению *xy*+*x*+*y* = 1. Докажите неравенство *x*2*y*2+*x*+*y* ≥ 5*xy*. (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 9 класс)

**8.** В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *AL*. Точка *P* — основание перпендикуляра, опущенного из точки *B* на отрезок *AL*. Из точки *P* на сторону *AB* опущена высота *PQ*. На стороне *AB* выбрана такая точка *R*, что *RQ* = *AC*/4. Докажите, что *AB*+*BC* ≥ 4*PR*. (А. Пастор)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА. ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА. ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА.

**1.** На плоскости дана точка *A*. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку различные прямые. Проигрывает тот, после хода которого угол между какими–то из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре? (Минск–2008)

**2.** Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы. (С. Берлов)

**3.** Дана клетчатая доска 25×25. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 3×3 клеток и отметить все три клетки любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 60 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена. (Олимпиада Черновецкой области, 9 класс, 2014, модификация)

**4.** В стране города соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого города можно выехать не более, чем по 7 дорогам. Докажите, что эту страну можно так разбить на 11 республик, что ни в одной республике нет города, из которого выходят две дороги в города этой республики. (В. Брагин, Д. Карпов)

**5.** При каких натуральных *n* среди чисел вида *k*3–3*k*, где *k* ⎯ произвольное целое число, встречаются числа, дающие всевозможные остатки при делении на *n*? (К. Сухов)

**6.** Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими? (Д. Ширяев по мотивам Минска–2005)

**7.** Неотрицательные числа *x* и *y* удовлетворяют соотношению *xy*+*x*+*y* = 1. Докажите неравенство *x*2*y*2+1 ≥ 6*xy*. (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 9 класс)

**8.** Точка *M* — середина стороны *BC* треугольника *ABC*. Точка *K* — основание перпендикуляра, опущенного из точки *M* на отрезок *AC*. На стороне *AC* выбрана такая точка *L*, что *KL* = *AC*/4. Докажите, что *AB*+*BC* ≥ 4*LM*. (А. Пастор, Д. Карпов)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА. ПЕВРАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7-8 МЕСТА. ВТОРАЯ ЛИГА.

**1.** На плоскости дана точка *A*. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку различные прямые. Проигрывает тот, после хода которого угол между какими–то из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре? (Минск–2008)

**2.** Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы. (С. Берлов)

**3.** Дана клетчатая доска 25×25. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 3×3 клеток и отметить все три клетки любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 60 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена. (Олимпиада Черновецкой области, 9 класс, 2014, модификация)

**4.** Найдите количество троек натуральных чисел (*a*, *b*, *c*) таких, что *a* < *b* < *c* < 2016 и *a*−*b* = *b*−*c*. (Сербия, заключительный этап, 3 разряд, 2002)

**5.** В каждой клетке таблицы *n*×*n* записано число. Оказалось, что для всех *k* сумма чисел, стоящих в *k*-ом столбце, отличается от суммы чисел, стоящих в *k*-й строке, ровно на 1. При каких *n* такое возможно? (Сербия, 2016)

**6.** Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими? (Д. Ширяев по мотивам Минска–2005)

**7.** Неотрицательные числа *x* и *y* удовлетворяют соотношению *xy*+*x*+*y* = 1. Докажите неравенство *x*2*y*2+*x*+*y* ≥ 3*xy*. (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 9 класс)

**8.** В остроугольном треугольнике *ABC* проведена высота *BH*. На отрезке *HC* отмечена такая точка *N*, что *HN* = *AC*/2. Докажите, что *AB*+*BC* ≥ 2*BN*. (Д. Карпов)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

**1.** Можно ли при помощи только скобок сделать равенство 1:2:3:4:5:6:7:8:9:10  =  2016 верным? (По мотивам задачи С. Токарева)

**2.** Петя написал в ряд в каком–то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы. (С. Берлов)

**3.** В каждой клетке таблицы *n*×*n* записано число. Для всех *k* сумма чисел *k*-го столбца отличается от суммы чисел *k*-й строки ровно на 1. При каких *n* такое возможно? (Сербия, 2016)

**4.** Найдите количество троек натуральных чисел (*a*,*b*,*c*), таких, что *a* < *b* < *c* < 2016 и *a*–*b* = *b*–*c*. (Сербия, заключительный этап, 3 разряд, 2002)

**5.** Квадрат 9×9 замощён прямоугольниками 1×3. Докажите, что какой–то квадрат 3×3 внутри данного квадрата замощён тремя такими прямоугольниками. (Фольклор)

**6.** Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими? (Д. Ширяев по мотивам Минска–2005)

**7.** Число 124 представили в виде суммы натуральных чисел (не обязательно различных), произведение которых также равно 124. Каким может быть количество этих натуральных чисел? (Ярославские дистанционные игры)

**8.** В остроугольном треугольнике *ABC* проведена высота *BH*. На отрезке *HC* отмечена такая точка *N*, что *HN* = *AC*/2. Докажите, что *AB*+*BC* ≥ 2*BN*. (Д. Карпов)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

**1.** На плоскости дана точка *A*. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре? (Минск-2008)

**2.** Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти три стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы. (С. Берлов)

**3.** Можно ли в квадрате 8×8 провести ломаную, проходящую по границам клеток (включая край), которая проходит ровно по одному разу по всем узлам (включая граничные) и делит квадрат на 4 части, в каждой из которых находится ровно по 2 клетки диагонали, соединяющей левый нижний угол с правым верхним? (Д. Ширяев)

**4.** Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими? (При каждой проверке можно пользоваться результатами всех предыдущих.) (Д. Ширяев по мотивам Минска-2005)

**5.** При каких натуральных *n* > 1 среди чисел, представимых в виде *a*7+5*a*6, где *a* ⎯ натуральное, найдутся числа, дающие все возможные остатки от деления на *n*? (По мотивам фольклора)

**6.** Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел *a* и *b*, не делящихся на 10, что 2*ab* = , где  означает число, полученное приписыванием числа *b* справа к числу *a*. Числа *a* и *b* не могут начинаться с 0. (Д. Ширяев по мотивам Минск-2007)

**7.** На турнир приехало *n* > 5 спортсменов. Оказалось, что среди любых пяти из них найдётся тот, кто знает остальных четверых. При каких *n* можно наверняка утверждать, что кто-то из спортсменов знает всех остальных? (Минск-2007)

**8.** Дана клетчатая доска 37×37. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 5×5 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 90 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена. (Олимпиада Черновецкой области, 9 класс, 2014, модификация)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ». ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА. ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** На плоскости дана точка *A*. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре? (Минск-2008)

**2.** Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти три стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы. (С. Берлов)

**3.** Можно ли в квадрате 8×8 провести ломаную, проходящую по границам клеток (включая край), которая проходит ровно по одному разу по всем узлам (включая граничные) и делит квадрат на 4 части, в каждой из которых находится ровно по 2 клетки диагонали, соединяющей левый нижний угол с правым верхним? (Д. Ширяев)

**4.** Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими? (При каждой проверке можно пользоваться результатами всех предыдущих.) (Д. Ширяев по мотивам Минска-2005)

**5.** При каких натуральных *n* > 1 среди чисел, представимых в виде *a*2+3*a*, где *a* ⎯ натуральное, найдутся числа, дающие все возможные остатки от деления на *n*? (По мотивам фольклора)

**6.** Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел *a* и *b*, что 2*ab* = , где  означает число, полученное приписыванием числа *b* справа к числу *a*. Числа *a* и *b* не могут начинаться с 0. (Д. Ширяев по мотивам Минск-2007)

**7.** На турнир приехало 47 спортсменов. Оказалось, что среди любых пяти из них найдётся тот, кто знает остальных четверых. Можно ли наверняка утверждать, что кто-то из спортсменов знает всех остальных? (Минск-2007)

**8.** Дана клетчатая доска 37×37. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 5×5 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 80 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена. (Олимпиада Черновецкой области, 9 класс, 2014, модификация)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** На плоскости дана точка *A*. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре? (Минск-2008)

**2.** Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы. (С. Берлов)

**3.** Квадрат 9×9 замощён прямоугольниками 1×3. Докажите, что какой-то квадрат 3×3 внутри данного квадрата замощён тремя такими прямоугольниками. (Фольклор)

**4.** Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими? (Д. Ширяев по мотивам Минска-2005)

**5.** Имеется таблица *N*×*N*, в каждой клетке которой записано число. Для всех *i* cумма чисел *i*-го столбца отличается от суммы чисел *i*-й строки ровно на 1. Для каких *N* такое возможно? (Сербия, 2016)

**6.** Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел *a* и *b*, что 2*ab* = , где  означает число, полученное приписыванием числа *b* сзади к числу *a*. Числа *a* и *b* не могут начинаться с 0. (Д. Ширяев по мотивам Минск-2007)

**7.** Число 20 представили в виде суммы натуральных чисел (не обязательно различных), произведение которых также равно 20. Каким может быть количество этих натуральных чисел? (Ярославские дистанционные игры)

**8.** Можно ли при помощи только скобок сделать равенство 1:2:3:4:5:6:7:8 = 2016:5 верным? (С. Токарев)